FISICA CUANTICA II
EXAMEN DE JULIO, PROBLEMAS
CURSO 2022/2023 3 de Julio de 2023

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[4].- Sean a y $a^\dagger$ los operadores escalera de un oscilador armonico unidimensional. Considerese un sistema cuyo hamiltoniano es:

$$H = \hbar\omega\Big(a^\dagger a + \frac{1}{2}\Big) + \hbar\omega\lambda a^\dagger a^2 a^\dagger ,$$

siendo ω y λ constantes reales positivas. En el instante inicial $t = 0$ el sistema esta en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + i|1\rangle\Big) ,$$

siendo $|0\rangle$ y $|1\rangle$ el estado fundamental y el primer estado excitado del sistema respectivamente.

a) Obtengase el estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ en un instante de tiempo $t > 0$.

b) Si en el instante de tiempo $t > 0$ se mide el observable $O = a + a^\dagger$, ¿cual sera el valor medio obtenido en dichas medidas?.

2[3]. La matriz densidad ρ de un oscilador es:

$$\rho = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n|}{2^n} ,$$

siendo C una constante y $|n\rangle$ el n-esimo autoestado del hamiltoniano del oscilador.

a) Obtengase la pureza $P = \mathrm{Tr}(\rho^2)$ del estado.

b) Obtengase la entropia de von Neumann del estado.

3[3].- En un sistema de dos particulas de espin $\frac{1}{2}$ se definen los operadores:

$$P_{\alpha\beta} = \alpha + \beta\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\hbar^2} ,$$

siendo α y β dos constantes reales y $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ los operadores de espin de cada una de las dos particulas.

a) Obtenganse los valores de las constantes α y β para que $P_{\alpha\beta}$ sea el proyector sobre los estados de espin total cero.

b) ¿Para que valores de α y β el operador $P_{\alpha\beta}$ es el proyector sobre los estados de espin total uno?.

(2)

Sean a y a^+ los operadores escalera de un oscilador armónico unidimensional. Considerese un sistema cuyo hamiltoniano es:

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega\lambda\, a^+ a^2 a^+$$

El estado del sistema en el instante inicial $t=0$ es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$$

siendo $|0\rangle$ y $|1\rangle$ el estado fundamental y el primer estado excitado del sistema respectivamente.

a) Obtengase el estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ en un instante de tiempo $t>0$.

b) Si en el instante $t>0$ se mide el observable $O = a+a^+$, ¿cual sera el valor medio obtenido

---

Vamos a obtener los niveles de energia. Para ello reescribimos $a^+a^2a^+$:

$$a^+a^2a^+ = a^+a\,\underbrace{aa^+}_{[a,a^+]+a^+a} = a^+a + (a^+a)^2$$

$$[a,a^+]+a^+a = 1 + a^+a$$

Entonces

$$H = \hbar\omega\left(a^+a+\tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega\lambda\left[a^+a + (a^+a)^2\right] \Longrightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega(1+\lambda)\,a^+a + \hbar\omega\lambda\,(a^+a)^2}$$

(3)

Sea $|n\rangle$ / $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \Rightarrow$

$$\boxed{H|n\rangle = E_n|n\rangle} \Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega\left[\lambda n^2 + (1+\lambda)n + \tfrac{1}{2}\right]}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

Estado fundamental $\Rightarrow n=0 \Rightarrow |0\rangle \Rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$

Primer estado excitado $\Rightarrow n=1 \Rightarrow |1\rangle$

$$E_1 = \hbar\omega\left[\lambda + 1 + \lambda + \tfrac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{E_1 = \hbar\omega\left(2\lambda + \tfrac{3}{2}\right)}$$

a)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle + i\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar\omega}{2}t\right]|0\rangle + i\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega\left(2\lambda+\tfrac{3}{2}\right)t\right]|1\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle + i\, e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}|1\rangle\right]}$$

b)

$$a|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}\underbrace{a|1\rangle}_{|0\rangle} = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}|0\rangle$$

$$a^\dagger|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\omega t}{2}}\underbrace{a^\dagger|0\rangle}_{|1\rangle} + i\, e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}\underbrace{a^\dagger|1\rangle}_{\sqrt{2}|2\rangle}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = {} & \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}|0\rangle + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|1\rangle + i\, e^{-i\omega\left(2\lambda+\frac{3}{2}\right)t}|2\rangle\end{aligned}}$$

(4)

$$\langle \psi(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}} \langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\omega(2\lambda+3/2)t} \langle 1|$$

$$\langle \psi(t)| O |\psi(t)\rangle = \frac{i}{2} e^{\frac{i\omega t}{2}} e^{-i\omega(2\lambda+3/2)t}$$

$$- \frac{i}{2} e^{i\omega(2\lambda+3/2)t} e^{-\frac{i\omega t}{2}} =$$

$$= \frac{i}{2}\left[\underbrace{e^{-i(2\lambda+1)\omega t} - e^{i(2\lambda+1)\omega t}}_{-2i \operatorname{sen}[(2\lambda+1)\omega t]} \right] = \operatorname{sen}[(2\lambda+1)\omega t]$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\langle O \rangle(t) = \operatorname{sen}[(2\lambda+1)\omega t]}$$

(5)

La matriz densidad ρ de un oscilador armónico unidimensional es

$$\rho = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{2^n}$$

siendo C una constante y $|n\rangle$ el n-ésimo autoestado del hamiltoniano.

a) Obtengase la pureza de ρ

b) Obtengase la entropía de von Neumann de ρ

---

a) Calculemos la constante C. Para ello imponemos la condición $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$

$$\mathrm{Tr}\,\rho = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C \frac{1}{1-1/2} = 2C = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 1/2} \Rightarrow \text{La matriz densidad es}$$

$$\boxed{\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{2^{n+1}}}$$

Calculamos ρ^2

$$\rho^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|p\rangle\langle p|}{2^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{p,n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+n+2}} |p\rangle \underbrace{\langle p|n\rangle}_{\delta_{p,n}} \langle n|$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} |n\rangle\langle n|}$$

Entonces

$$Tr(\rho^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{4} \frac{1}{3/4} \Rightarrow$$

$$\boxed{Pureza(\rho) = Tr(\rho^2) = \frac{1}{3}}$$

b)

$$\log \rho = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \log_2 |n\rangle\langle n|$$

$$\rho \log \rho = -\log(2) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|p\rangle\langle p|}{2^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |n\rangle\langle n| =$$

$$= -\log_2 \sum_{p,n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{p+1}} |p\rangle \underbrace{\langle p|n\rangle}_{\delta_{p,n}} \langle n| = -\log 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} |n\rangle\langle n|$$

$$\Rightarrow$$

$$S_{VN} = -Tr[\rho \log \rho] = \log 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 1 \Bigg] \Rightarrow \boxed{S_{VN} = 2\log(2)}$$

$\uparrow$ $\sum_n n x^n = x/(1-x)^2$

(7)

En un sistema de dos partículas de espín 1/2 se definen los operadores

$$P_{\alpha,\beta} = \alpha + \beta \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2}$$

siendo α y β dos números reales y $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ los operadores de espín de cada una de las dos partículas

a) Obténganse los valores de las constantes α y β para que $P_{\alpha,\beta}$ sea el proyector sobre los estados de espín total cero

b) ¿Para qué valores de α y β el operador $P_{\alpha,\beta}$ es el proyector sobre los estados de espín total uno?

Recordemos que $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$

Para una partícula de espín 1/2 $\Rightarrow$

$$\vec{S}_1^2 = \vec{S}_2^2 = \tfrac{3}{4}\hbar^2$$

Entonces

$$\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2} = \frac{\vec{S}^2}{2\hbar^2} - \frac{1}{2\hbar^2} \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{4}\hbar^2 = \frac{\vec{S}^2}{2\hbar^2} - \tfrac{3}{4}$$

$$\boxed{P_{\alpha,\beta} = \alpha + \beta\left[\frac{\vec{S}^2}{2\hbar^2} - \tfrac{3}{4}\right] = \alpha - \tfrac{3}{4}\beta + \beta\frac{\vec{S}^2}{2\hbar^2}}$$

$|\phi_0\rangle \rightarrow$ espín cero $\qquad |\phi_1\rangle \rightarrow$ espín 1

$\Rightarrow$

$$\vec{S}^2|\phi_0\rangle = 0 \qquad \vec{S}^2|\phi_1\rangle = \hbar^2 1(1+1)|\phi_1\rangle = 2\hbar^2|\phi_1\rangle$$

(8)

$$\boxed{P_{\alpha,\beta}|\phi_0\rangle = (\alpha - 3/4\,\beta)|\phi_0\rangle}$$

$$P_{\alpha,\beta}|\phi_1\rangle = (\alpha \underbrace{-3/4\,\beta + \frac{\beta}{2\hbar^2}2\hbar^2}_{(1-3/4)\beta = \beta/4})|\phi_1\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\alpha,\beta}|\phi_1\rangle = (\alpha + \beta/4)|\phi_1\rangle}$$

a) Proyectar sobre $|\phi_0\rangle$

$P_{\alpha,\beta}|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle \Rightarrow \boxed{\alpha - 3/4\,\beta = 1}$ (1)

$P_{\alpha,\beta}|\phi_1\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta/4 = 0}$ (2)

(2) − (1) $\Rightarrow \boxed{\beta = -1} \Rightarrow \alpha = 3/4\,\beta + 1 = -3/4 + 1 = 1/4$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1/4} \Rightarrow \boxed{P_0 = 1/4 - \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2}}$

b) Proyectar sobre $|\phi_1\rangle$

$P_{\alpha,\beta}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta/4 = 1}$ (3)

$P_{\alpha,\beta}|\phi_0\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha - 3/4\,\beta = 0}$ (4)

(3) − (4) $\Rightarrow \boxed{\beta = 1}$ $\alpha = 3/4\,\beta = 3/4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3/4}$

$$\boxed{P_1 = 3/4 + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2}}$$